УДК 530.12:531.51

АТОМНАЯ МОДЕЛЬ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В.В. Ласуков

Томский политехнический университет
Тел.: (382-2)-415-877

Исследуется квантовая теория ранней плоской Вселенной с отрицательной эффективной космологической постоянной, имитируемой однородным скалярным потенциалом. Показано, что ранняя Вселенная с отрицательной космологической постоянной подобна гравитационному атому, который может служить источником обычного вещества за счет спонтанного излучения массивных частиц.

Ранее в работе [1] на основе гравитационного аналога уравнения Шредингера,

$$i\frac{\partial}{\partial x^0}\Psi = \sqrt{g_{00}}\hat{H}\Psi$$

было рассмотрено квантовое рождение Вселенной, обусловленное эффек $\Lambda = 8\pi G\breve{U}_0$ тельной космологической постоянной . Здесь

$$\hat{H} = \frac{1}{2aM_p^2}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{2V}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + VU(\varphi).$$

Очевидно, величину $\frac{\partial}{\partial x^0}\Psi$ можно умножить на произвольный множитель, так как коэффициент $\sqrt{\gamma_{00}}$ произволен, и, следовательно, в него можно включить этот множитель. Умножение же $\frac{\partial}{\partial x^0}\Psi$ на некоторую величину равносильно переходу к другой шкале времени, так что это уравнение обладает репараметризационной инвариантностью относительно замены временной координаты x^0. Для решения же космологических задач наиболее естественным является собственное время $dt = \sqrt{g_{00}}dx^0$. При построении гамильтониана, отличного от нуля, использовалась нетривиальная метрика плоской Вселенной [3]

$$ds^2 = a^6(dx^0)^2 - a^2 \times$$
$$\times\left(dr^2 + \sin^2(\vartheta)r^2\left[d\vartheta^2 + \sin^2(\psi)d\psi^2\right]\right)$$
$$a = a(x^0),$$

где $g_{00} = a^6$, так что метрический коэффициент γ_{00} не является независимой переменной, вследствие чего среди уравнений Лагранжа отсутствует $\varepsilon_\varphi - \varepsilon_a = 0$, нента уравнений Гильберта-Эйнштейна и гамильтониан отличен от нуля. Поэтому при варьировании действия по a и φ (по координатам a, φ – мини-суперпространства (a, φ), которое не следует путать с суперпространством, введенным для описания суперсимметричных теорий; φ – функция скалярного поля) получается но[illegible] уравнений Лагранжа (замена переменной $dt = a^3dx^0$ осуществлена после проведения процедуры варьирования):

$$\begin{cases} \frac{a''}{a} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 8\pi GV(\varphi) = 0, \\ \varphi'' + 3\left(\frac{a'}{a}\right)\varphi' = -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \\ a' \equiv \frac{da}{dt},\ \varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dt},\quad dt = a^3dx^0, \end{cases}$$

более общая, чем уравнения Фридмана плоской Вселенной:

$$\begin{cases} \frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\varepsilon_a + 3p), \\ \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon_a, \\ \varepsilon_a = \varepsilon_\varphi = \frac{\varphi'^2}{2} + V(\varphi). \end{cases}$$

Первая система имеет такие решения, которые не удовлетворяют уравнениям Фридмана. Всякое же решение системы уравнений Фридмана удовлетворяет и первой системе, так как первое из ее уравнений может быть получено из уравнений Фридмана умножением на 2 первого из них и последующим его сложением со вторым с учетом (00)-компоненты $\varepsilon_a = \frac{\varphi'^2}{2} + V(\varphi)$. Второе же уравнение

$$\varphi'' + 3\frac{a'}{a}\varphi' = -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}$$

первой системы нетрудно получить дифференцированием по t (00)-компоненты

$$\varepsilon_a = \frac{\varphi'^2}{2} + V(\varphi)$$

с учетом двух других уравнений Фридмана:

$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\varepsilon_a + 3p),$$

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon_a$$

и соотношения $p = \frac{\varphi'^2}{2} - V(\varphi)$, так что уравнения Фридмана являются частным случаем первой системы

уравнений. Например, среди решений есть известное инфляционное решение $a = a_0 \exp(\omega t)$ и решения фридмановского типа $a = a_0 t^q,\ q < 1$, для которых гамильтониан равен нулю, но есть и такие решения, для которых гамильтониан отличен от нуля $a = a_0 ch^{\mu}(\omega t),\ \mu = \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$ [3]. Система имеет также нетривиальные решения ньютоновского типа [4].

В данной работе исследуется квантовая теория Вселенной с отрицательной эффективной космологической постоянной $(U_0 < 0)$ и гамильтонианом, отличным от нуля, т.е. атомная модель Вселенной.

Гравитационный атом

Согласно [1–3], гравитационный аналог стационарного уравнения Шредингера, описывающего раннюю Вселенную как одномерный гравитационный атом, можно представить в привычном виде

$$\left[\frac{1}{2M_p}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - W(a, E)\right]\Psi(a) = 0, \qquad (1)$$

где $\Omega(\alpha, E) = M_\pi \alpha [\varsigma |Y_0| + E]$ – эффективная потенциальная яма, параметрически зависящая от энергии E так что каждому возможному значению E' соответствует своя потенциальная яма, содержащая лишь один уровень E'; $E < 0$; $V = \frac{4\pi a^3}{3}$; $M_p^{-2} = G$ – гравитационная постоянная.

Уравнение (1) отличается от традиционного тем, что оператор кинетической энергии имеет вид $T = \frac{-1}{2M_\pi^{2\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$ вместо $\frac{1}{2M_p}\frac{\partial^2}{\partial a^2}$, из-за чего собственные функции не ортогональны. Делая замену переменной $x = \frac{\alpha^3}{6}$, из (1) найдем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{2}{3\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \alpha^2 - \frac{4EM_p^2}{3\xi}\right]\Psi = 0,$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{32\pi}{3}|U_0| M_p^2} \equiv \frac{8}{3}\omega M_p^2$. Нетрудно видеть, что уравнение (1) инвариантно относительно дискретных симметрий пространственного отражения $\alpha \to -\alpha$ и обращения времени $\tau \to -\tau$ или, что, то же самое, $E \to -E$. (2)

Асимптотическое решение при $\alpha \to \infty$ можно найти согласно (2) из уравнения

$$\Psi''_\infty - a^2\Psi_\infty = 0,$$

всюду конечное решение которого равно

$$\Psi_\infty = \exp(-a x).$$

Поэтому общее решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_\infty \cdot \phi.$$

В этом случае для определения неизвестной функции ϕ получаем уравнение (3)

$$\xi\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \left[(n+1) - \xi\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\phi + \beta\phi = 0,$$

где $x = 2\alpha\xi$; $\nu + 1 = \frac{2}{3}$; $b = -\left(\frac{1}{3} + \frac{E}{4\omega}\right)$.

Чтобы характер решения для Ψ на бесконечности определялся асимптотической формулой (3), необходимо найти условие, при котором функция f будет представлять собой конечный полином степени n [5]: (4)

$$\phi = \sum_{\kappa=0}^{\nu} X_\kappa \xi^\kappa.$$

Подставляя (5) в (4) и группируя члены с одинаковыми степенями x, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \left\{C_k[b-k] + C_{k+1}\left[\begin{array}{c} k(k+1)+ \\ +(k+1)(\nu+1)\end{array}\right]\right\} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $X_{\nu+1} = 0,\ X_\nu \neq 0$, получаем необходимое условие квантования энергии: (5)

$$E_n = \begin{cases} -4\omega\left(n + \frac{1}{3}\right), & a > 0, \\ 4\omega\left(n + \frac{1}{3}\right), & a < 0, \end{cases} \qquad (6)$$

где $n = 0, 1, 2 \ldots -$.

Учитывая (7), для определения коэффициентов X_κ согласно (6) получаем рекуррентное соотношение

$$X_\kappa(\nu - \kappa) = -X_{\kappa+1}(\kappa+1)(n+\kappa+1). \qquad (7)$$

С помощью (8) для функции ϕ находим выражение

$$f = C_0\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k x^k}{k!(1+\nu)_k} =$$

$$= C_0\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+k+\nu)} \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,\Gamma(1+k+n)}{k!\,\Gamma(1+k+\nu)\Gamma(n+1-k)}x^k. \qquad (8)$$

Выберем коэффициент X_0 так, чтобы коэффициент при старшей степени имел вид $X_\nu = (-1)^\nu$. Для этого следует выбрать

$$C_0 = \frac{\Gamma(\nu+1+n)}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Тогда имеем

$$f = n! L_n^{(\nu)}(x),$$

где $\Lambda_\nu^{(n)}(\xi)$ – обобщенный многочлен Лагерра порядка n. Таким образом, для функции Ψ окончательно имеем

$$\Psi = \begin{cases} N\exp\left(-\frac{x}{2}\right)n!L_n^{(\nu)}(x), & a>0,\\ N\exp\left(\frac{x}{2}\right)n!L_n^{(\nu)}(-x), & a<0,\end{cases}$$

где $x = 2\alpha\xi$.

Используя известный интеграл [6]

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}\exp(-cx)L_m^{(\gamma)}(cx)L_n^{(\lambda)}(cx)dx =$$

$$= \frac{(1+\gamma)_m(\lambda-\beta+1)_n\Gamma(\beta)}{m!n!c^\beta}\times$$

$$\times {}_3F_2\begin{bmatrix}-m,\ \beta,\ \beta-\lambda;\ 1\\ \gamma+1,\ \beta-\lambda-n\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Re}\beta,\ \mathrm{Re}c>0,$$

можно найти нормировочный множитель N и начальные моменты $\langle\alpha^\nu\rangle$ произвольного порядка n, которые понадобятся при построении теории "излучения" гравитационного атома. Например, если использовать условие нормировки

$$\int_0^\infty \Psi^2 da = 1,$$

то

$$N = \frac{(9\alpha)^{1/6}}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+n\right)}.$$

В соответствии с (1) уравнение, описывающее раннюю Вселенную с отрицательной космологической постоянной $\Lambda = -8\pi G|V_0|$, имитируемой постоянной составляющей потенциала скалярного поля, имеет вид

$$\left[\frac{1}{2M_p}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - M_p aV|U_0|\right]\Psi = M_p aE_n\Psi,$$

$$E_\nu < 0.$$

При $\Lambda > 0$ уравнение выглядит следующим образом [1]:

$$\left[\frac{1}{2M_p}\frac{\partial^2}{\partial a^2} + M_p aV|U_0|\right]\Psi = M_p aE\Psi,$$

$$E > 0.$$

В уравнении (10) осуществим поворот Вика $a \to ib,\quad E \to -i\tilde{E}$. Тогда уравнение (10) примет вид (9)

$$\left[\frac{1}{2M_p}\frac{\partial^2}{\partial b^2} - M_p bV|U_0|\right]\Psi = M_p b\tilde{E}\Psi,$$

$$\tilde{E} < 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнение (11) совпадает с уравнением (9). Поэтому Вселенную с отрицательной космологической постоянной можно рассматривать как Вселенную с положительной космологической (10) постоянной, но с сигнатурой $(++++)$. Спин "эффективной частицы" с массой M_p введем с помощью суперсимметрии. Для этого представим уравнение (1) в суперсимметричном виде [7]:

$$H = \begin{pmatrix}H_- & 0\\ 0 & H_+\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\hat{p}_a^2 + \frac{U'^2}{2}\right]I + \frac{U''}{2}\Sigma_z, \qquad (11)$$

где $S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};\quad I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad U = -2\ln(\Psi_0);$

$\Psi_0 = \exp(-ax)$ – волновая функция при n=0, так что

$$\frac{U'^2}{4} = 2M_p^2 Va|U_0|,\quad \frac{U''}{4} = \frac{4}{3}\omega M_p^2 a.$$

Генераторы суперсимметрии имеют вид:

$$Q = \left[\hat{p}_a - i\frac{U'}{2}\right]\sigma^+,\quad \bar{Q} = \left[\hat{p}_a + i\frac{U'}{2}\right]\sigma^-,$$

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^- = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (12)$$

и удовлетворяют соотношениям

$$[Q,\ H]_- = [\bar{Q},\ H]_- = 0,\quad \{\bar{Q},\ \bar{Q}\}_+ = \{Q,\ Q\}_+ = 0,$$

$$\{\bar{Q},\ Q\} = 2H.$$

Суперсимметричный гамильтониан (12) имеет смысл гамильтониана, объединяющего бозонное поле (кванты возбуждения осциллятора) и фермионы с полуцелым (13) спином 1/2 и массой M_p. Член $\frac{U'^2}{2}$ характеризует взаимодействие бозонов с бозонами; $\frac{U''}{2}\Sigma_z$ – характеризует взаимодействие фермионов с бозонами.

Представим собственную функцию гамильтониана (12) в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1(\alpha)\\ \Psi_2(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$H_+\Psi_+ = M_p^2 aE_1\Psi_+;$$

$$H_-\Psi_- = M_p^2 aE_2\Psi_-,$$

где

$$H_\pm = \frac{1}{2}\hat{p}_a^2 + \left[\frac{U'^2}{8} \mp \frac{U''}{4}\right];\qquad \Psi_+ = \Psi_2(\alpha)\upsilon_2;$$

$$\Psi_- = \Psi_1(a)u_1,$$

$$S_z u_{1,2} = \pm\frac{1}{2}u_{1,2},\quad u_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Из (14), (15) следует, что

$$H_{-}(Q\Psi_{+}) = M_p^2 a E_2 (Q\Psi_{+}),$$

и, следовательно $E_1 = E_2$ и

$$\Psi_1(\alpha) = \left[\hat{\mathfrak{L}}_\alpha - \frac{Y'}{2} \right] \Psi_2(\alpha). \qquad (14)$$

С учетом (13), составляющие гамильтониана (12) соответствуют энергетическим уровням

$$E_{\pm} = E_n \pm \frac{4}{3}\omega, \qquad E_n = -4\omega\left[n + \frac{1}{3}\right],$$

так что состояние с энергией, равной нулю, существует и принадлежит только составляющей H_{+}. Так как $E_{+} - E_{-} = \frac{8}{3}\omega$ не совпадает с частотой осциллятора 4ω, то спектр энергетических уровней является невырожденным.

Суперсимметрия нарушена спонтанно, так как существует генератор Θ такой, что

$$\left[\bar{Q}, H\right]_{-} = 0 \text{ и } \bar{Q}\Psi_0 \neq 0.$$

Генераторы суперсимметрии Θ, $\bar{\Theta}$ действуют на волновые функции следующим образом:

$$\Theta\Psi_{+} = \Psi_{-}, \quad \bar{\Theta}\Psi_{-} = \Psi_{+} \qquad (16)$$

Из (16) видно, что при преобразовании суперсимметрии эффективная частица с массой M_p меняет направление спина на противоположное и одновременно переходит с одного уровня E_{+} на другой E_{-}. При этом ее энергия меняется.

Переворот спина – это дискретное преобразование, а переход с одного уровня на другой обусловлен действием бозонных операторов уничтожения и рождения, построенных из координаты α и импульса $\hat{\mathfrak{L}}_\alpha$.

Импульс является генератором трансляций – непрерывных преобразований, а координата – генератором трансляций в импульсном пространстве. Генераторы Q, $\bar{Q}$ объединяют свойства отмеченных непрерывных и дискретных преобразований.

В рассмотренной выше суперсимметричной квантовой механике суперсимметрия не является максимальной, так как суперпреобразования Q, $\bar{Q}$ не связывают частицу с другими частицами, спины которых отличаются от ее спина на 1/2.

В заключение отметим, что в частом случае, когда уравнение (2) является аналогом уравнения связи Уилера-ДеВитта $\hat{H}\Psi = 0$ [8–14], решение которого равно

$$\Psi(a) = z^{1/6} K_{1/6}(z),$$

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда, которая при $\zeta >> 1$ убывает по экспоненциальному закону;

$$z = \alpha \cdot \xi, \quad \xi = \frac{a^3}{6}, \quad \alpha = \frac{8}{3}\omega M_p^2.$$

Аналогично, в случае положительной космологической постоянной, который рассмотрен в работе [1],

$$\Psi(a) = z^{1/6} J_{1/6}(z),$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода.

Отметим, что в работе [1] найдена вероятность рождения Вселенной однородным скалярным полем $U_0 > 0$

$$P = \exp\left[-\frac{\pi E}{2\omega}\right].$$

Показано, что время формирования процесса рождения Вселенной равно $t_c \approx \omega^{-1}$, так что вследствие соотношения неопределенности $E \approx \omega$. Тогда вероятность рождения Вселенной при

$$E = \gamma\pi\omega, \quad \gamma = 0{,}997050, \quad e = 2{,}718282, \quad \pi = 3{,}141593$$

равна $P = \exp\left[-\frac{\gamma\pi^2}{2}\right]$ и совпадает с постоянной тонкой структуры с точностью до третьего знака после запятой $\alpha^{-1} = 137{,}036$.

Константу γ можно интерпретировать как величину, учитывающую небольшое отличие значения числа π_i в ранней Вселенной от его современного значения π_f.

Относительное отклонение равно

$$\delta_\pi = \frac{\Delta_\pi}{\pi_i} = 1 - \sqrt{\gamma} = 1{,}476 \cdot 10^{-3}.$$

Проведенное рассмотрение позволяет сделать следующие выводы:

- Вселенная с отрицательной эффективной космологической постоянной эквивалентна одномерному гравитационному атому, который можно считать подобным одномерным протяженным объектам теории струн.
- Вселенную с $Y_0 < 0$ и лоренцевой сигнатурой (+ – – –) можно рассматривать как Вселенную с $Y_0 > 0$, но с евклидовой сигнатурой $(+ + + +)$.
- Спин эффективной частицы с массой M_π может быть введен за счет спонтанно нарушенной суперсимметрии. Такая суперчастица может быть реальной.
- Обычное вещество может возникать за счет спонтанного “излучения” массивных частиц исследованным в данной статье гравитационным атомом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ласуков В.В. Квантовое рождение Вселенной // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 5. – С. 88–92.
2. Ласуков В.В. Вселенная без сингулярности // Изв. вузов. Физика. – 2001. – № 7. – С. 18–21.
3. Ласуков В.В. Вселенная в метрике Логунова // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 2. – С. 39–41.
4. Ласуков В.В. Вселенная в метрике Логунова с неоднородным скалярным полем // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 8. – С. 91–92.
5. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. – М.: Наука, 1974. – С. 179–180.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – С. 477–488.
7. Witten E. // Nucl. Phys. – 1981. – V. B188. – P. 513.
8. DeWitt B.S. // Phys. Rev. – 1967. – V. 160. – P. 1113.
9. DeWitt B.S. // Phys. Rev. – 1967. – V. 162. – P. 1195.
10. Barvinsky A.O. // Phys. Report. – 1993. – V. 230. – P. 237.
11. Альтшулер Б.Л., Барвинский А.О. Квантовая космология и физика переходов с изменением сигнатуры пространства-времени // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166. – С. 459–492.
12. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – М.: Наука, 1990. – С. 208–220.
13. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – С. 139–159.
14. Чернин А.Д. Космический вакуум // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – С. 1153–1175.